

*Mathématiques en devenir*

101. — Jacques Faraut. *Analyse sur les groupes de Lie – Une introduction*. Nouvelle édition revue et augmentée
102. — Patrice Tauvel. *Corps commutatifs et théorie de Galois*. Troisième édition revue et bonifiée
103. — Jean Saint Raymond. *Topologie, calcul diff. et variable complexe*
104. — Clément de Seguin Pazzis. *Invitation aux formes quadratiques*
105. — Bruno Ingrao. *Coniques projectives, affines et métriques*
106. — Wolfgang Bertram. *Calcul différentiel topologique élémentaire*
107. — Henri Lombardi & Claude Quitté. *Algèbre commutative. Méthodes constructives*. Nouvelle édition revue et augmentée
108. — Frédéric Testard. *Analyse mathématique. La maîtrise de l'implicite*
109. — Grégory Berhuy. *Modules : théorie, pratique... et un peu d'arithmétique*. Nouvelle édition
110. — Bernard Candelpergher. *Théorie des probabilités. Une introduction élémentaire (nouveau tirage bonifié)*
111. — Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome premier*
112. — Gema-Maria Díaz-Toca, Henri Lombardi & Claude Quitté. *Modules sur les anneaux commutatifs*
113. — Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome second, encores*
114. — Alain Debreil. *Groupes finis et treillis de leurs sous-groupes*
115. — François Rouvière. *Initiation à la géométrie de Riemann*
116. — Nikolai Nikolski. *Matrices et opérateurs de Toeplitz*
117. — Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome premier (nouveau tirage)*
118. — Martine et Hervé Queffelec. *Analyse complexe et applications*. Nouveau tirage, bonifié et corrigé
119. — Alain Debreil, Jean-Denis Eiden, Rached Mneimné et Tuong-Huy NGuyen. *Formes quadratiques et géométrie*
120. — Christian Leruste. *Topologie algébrique – Une introduction, et au-delà*
121. — Grégory Berhuy. *Algèbre : le grand combat*. Nouvelle édition

122. — Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome second* (nouveau tirage)
123. — Charles-Michel Marle. *Géométrie symplectique et géométrie de Poisson*
124. — Pascal Boyer. *Petit compagnon des nombres et de leurs applications*
- 125 et 126. — Laurent Le Floch, Frédéric Testard. *Probabilités 1 et 2 – Le hasard est la nécessité.*
127. — David Chiron. *Chemins d'analyse (1) - Espace de Schwartz, distributions Tempérées et transformation de Fourier.*
128. — Gentiana Danila, Jean-Denis Eiden et Rached Mneimné. *Algèbre éclectique*
129. — Yves Coudène. *La géométrie élémentaire d'Euclide à aujourd'hui*

Yves Coudène

# La géométrie élémentaire d'Euclide à aujourd'hui



Calvage & Mounet

YVES COUDÈNE est ancien élève de l'École normale supérieure de Cachan. Il est professeur de mathématiques à Sorbonne Université. Ses recherches portent sur la théorie ergodique, la géométrie différentielle et les systèmes dynamiques.

yves.coudene@upmc.fr

Mathematics Subject Classification (2000) :

51-XX Geometry

51MXX Real and complex geometry

51M04 Elementary problems in Euclidean geometries

51M15 Geometric constructions

51M20 Polyhedra and polytopes

∞ Imprimé sur papier permanent

© Calvage & Mounet, Paris, 2022

ISBN 978-2-49-323001-0



9 782493 230010

*à Caroline, Philémon et Valentin*



# Préface

La géométrie euclidienne a une longue histoire. Ce livre rend compte de son évolution aussi bien sur le plan historique qu'au niveau des méthodes.

D'Euclide à Poincaré en passant par Descartes, la géométrie s'est faite tour à tour synthétique, cartésienne, différentielle ou structurelle. Le rôle qu'elle joue dans le système éducatif en a fait un sujet de querelles idéologiques, une époque malheureuse a voulu opposer les méthodes que nous ont léguées les Anciens à celles promues par les Modernes. Disons-le haut et fort, il n'y a pas en géométrie un point de vue supérieur aux autres, mais des approches complémentaires qui s'éclairent mutuellement.

Le but de ce livre est d'apporter une vue d'ensemble sur cette géométrie héritée d'Euclide, que les mathématiciens développent depuis maintenant plus de trois mille ans. Le sujet est vaste et il ne peut s'agir que d'une introduction partielle et partielle à un sujet dont la richesse est inépuisable. Nous nous sommes restreints à ses aspects les plus élémentaires ayant pour objets la droite, le cercle et les polygones du plan, avant de poursuivre par quelques incursions vers des domaines plus avancés en lien avec les géométries non euclidiennes et avec d'autres domaines des mathématiques comme l'analyse et la topologie.

Nous espérons que ce livre donnera envie au lecteur d'en apprendre plus et qu'il lui permettra de s'orienter à travers une littérature foisonnante d'ouvrages remarquables, dont la plupart sont disponibles sous forme électronique.

Nous vivons à une époque où jamais il n'a été aussi facile d'accéder au savoir accumulé au cours des siècles passés. Il est maintenant possible d'obtenir en quelques clics des versions numérisées d'ouvrages millénaires, dont la lecture était auparavant réservée à quelques érudits bien informés. Il faut faire usage de cette opportunité car les grands auteurs d'hier sont les grands auteurs d'aujourd'hui. Nous avons eu à cœur tout au long de notre ouvrage de présenter de nombreux traités de géométrie jadis célèbres mais maintenant en partie oubliés. Nous avons replacé chacun d'eux dans leur contexte pour en expliquer la portée et le sens.

Et pour commencer, nous vous proposons de débiter cet ouvrage par une lecture commentée du plus célèbre d'entre eux : le premier livre des Éléments d'Euclide.



# Table des matières

|   |     |
|---|-----|
| <b>I. Le livre I des Éléments</b>                                   |     |
| 1. Conseils de lecture . . . . .                                    | 3   |
| 2. Notes sur la traduction . . . . .                                | 3   |
| 3. Définitions . . . . .  | 6   |
| 4. Demandes . . . . .   | 8   |
| 5. Notions Communes . . . . .                                       | 8   |
| 6. Propositions . . . . .   | 9   |
| <br>  |     |
| <b>II. Le livre I commenté</b>                                      |     |
| 1. Définitions . . . . .  | 59  |
| 2. Demandes . . . . .   | 64  |
| 3. Notions communes . . . . .                                       | 66  |
| 4. Remarques sur les grandeurs . . . . .                            | 70  |
| 5. Propositions 1-8 : cas d'égalité des triangles . . . . .         | 73  |
| 6. Interlude : le plan hyperbolique . . . . .                       | 79  |
| 7. Propositions 9-15 : propriétés des angles . . . . .              | 81  |
| 8. Propositions 16-21 : inégalités d'angles et de droites . . . . . | 84  |
| 9. Propositions 22-26 : cas d'inégalités des triangles . . . . .    | 86  |
| 10. Propositions 27-32 : parallélisme . . . . .                     | 88  |
| 11. Propositions 33-41 : théorie des aires . . . . .                | 90  |
| 12. Propositions 42-45 : constructions relatives à l'aire . . . . . | 93  |
| 13. Propositions 46-48 : le théorème de Pythagore . . . . .         | 94  |
| <br>  |     |
| <b>III. Géométrie cartésienne</b>                                   |     |
| 1. Le plan cartésien . . . . .                                      | 97  |
| 2. Angles . . . . .   | 103 |
| 3. La mesure des angles . . . . .                                   | 109 |
| 4. Aire, périmètre et angle en géométrie synthétique . . . . .      | 112 |
| 5. Aire, longueur et angle en géométrie cartésienne . . . . .       | 119 |
| 6. Transformations . . . . .  | 126 |
| 7. Géométrie dans l'espace . . . . .                                | 135 |

|  |     |
|--|-----|
| <b>IV. Axiomatiques de la géométrie euclidienne</b>            |     |
| 1. Axiomatique de David Hilbert . . . . .                      | 142 |
| 2. Axiomatique de Georges David Birkhoff . . . . .             | 152 |
| 3. Axiomatique d'Emil Artin . . . . .                          | 155 |
| 4. Axiomatique de Veblen-Young . . . . .                       | 159 |
| 5. Axiomatique d'Alfred Tarski . . . . .                       | 162 |
| 6. Autres axiomatiques . . . . .                               | 168 |
| <b>V. Euclide et l'enseignement de la géométrie</b>            |     |
| 1. Les <i>Éléments</i> , un classique par excellence . . . . . | 175 |
| 2. Le XX <sup>e</sup> siècle . . . . .                         | 181 |
| 3. La situation au début du XXI <sup>e</sup> siècle . . . . .  | 190 |
| <b>VI. Les avatars de la géométrie euclidienne</b>             |     |
| 1. Espaces euclidiens et algèbre linéaire . . . . .            | 194 |
| 2. Trigonométrie . . . . .                                     | 227 |
| 3. Géométrie projective . . . . .                              | 236 |
| 4. Formes quadratiques . . . . .                               | 273 |
| <b>VII. Géométrie et analyse</b>                               |     |
| 1. Caractérisation des nombres réels . . . . .                 | 287 |
| 2. Propriétés universelles en géométrie . . . . .              | 292 |
| 3. L'inégalité de Cauchy-Schwarz . . . . .                     | 303 |
| 4. Analyse fonctionnelle . . . . .                             | 310 |
| <b>VIII. Géométrie et topologie</b>                            |     |
| 1. Le théorème de Jordan . . . . .                             | 322 |
| 2. Triangulation des polygones . . . . .                       | 347 |
| 3. Homotopie et théorème de Brouwer . . . . .                  | 358 |
| <b>IX. Quelques exercices de géométrie</b>                     |     |
| 1. Ceux dans l'esprit des <i>Éléments</i> . . . . .            | 368 |
| 2. Ceux dont l'énoncé semble incomplet . . . . .               | 369 |
| 3. Ceux dont la figure induit en erreur . . . . .              | 370 |
| 4. Ceux qui ont l'attention des grands hommes . . . . .        | 371 |
| 5. Les constructions . . . . .                                 | 372 |
| 6. Les découpages . . . . .                                    | 373 |
| 7. Qui font appel à des transformations . . . . .              | 373 |
| 8. Les impossibles . . . . .                                   | 374 |
| 9. Les inégalités . . . . .                                    | 375 |
| 10. Ceux du second ordre . . . . .                             | 376 |
| 11. Ceux qui font polémique . . . . .                          | 376 |
| 12. Les plus courts . . . . .                                  | 378 |
| 13. Et caetera . . . . .                                       | 378 |

|  |            |
|--|------------|
| <b>X. La recherche en géométrie élémentaire</b>                    |            |
| 1. La mort de la géométrie . . . . .                               | 381        |
| 2. Quelques résultats récents . . . . .                            | 385        |
| 3. Conjectures résolues . . . . .                                  | 391        |
| 4. Questions ouvertes . . . . .                                    | 398        |
| <b>Annexe 1. Propositions du livre I</b>                           |            |
| 1. Liste des propositions du Livre I . . . . .                     | 403        |
| 2. Noms de polygones en fonction de leur nombre de côtés . . . . . | 405        |
| <b>Annexe 2. Le postulat des parallèles</b>                        |            |
| 1. Le postulat des parallèles et ses démonstrateurs . . . . .      | 407        |
| 2. Énoncés équivalents au postulat des parallèles . . . . .        | 408        |
| <b>Annexe 3. Trigonométrie</b>                                     |            |
| 1. Sinus, cosinus et tangente . . . . .                            | 411        |
| 2. Formules faisant intervenir les nombres complexes . . . . .     | 412        |
| 3. Fonctions réciproques . . . . .                                 | 413        |
| 4. Changement de variable de l'arc moitié . . . . .                | 413        |
| 5. Linéarisation . . . . .   | 413        |
| 6. Dérivées . . . . .  | 414        |
| 7. Relations dans le triangle . . . . .                            | 414        |
| 8. Inégalités pour les convexes . . . . .                          | 415        |
| 9. Algèbre vectorielle . . . . .                                   | 415        |
| 10. Développements en série . . . . .                              | 416        |
| 11. Valeurs des fonctions trigonométriques . . . . .               | 418        |
| <b>Bibliographie</b>   | <b>419</b> |
| <b>Notations</b>   | <b>437</b> |
| <b>Index des auteurs</b>   | <b>439</b> |
| <b>Index</b>   | <b>443</b> |



# Avant-propos

*Et j'espère que nos neveux me sauront gré, non seulement des choses que j'ai ici expliquées, mais aussi de celles que j'ai omises volontairement, afin de leur laisser le plaisir de les inventer.*

René Descartes (1596-1650)

Ce livre traite de géométrie euclidienne d'un point de vue élémentaire. Partant du texte du premier livre des *Éléments* d'Euclide, il s'intéresse à l'évolution de cette géométrie au cours des siècles avant d'étudier ses relations avec l'algèbre, la topologie et l'analyse. Il se termine par la présentation d'une liste de problèmes irrésolus à ce jour. La majeure partie de l'ouvrage se situe au niveau de la première année de licence de mathématiques avec l'ambition de s'adresser à un public aussi large que possible.

Pour les générations passées, la géométrie euclidienne est née dans les pages d'un livre millénaire, premier tome d'un traité en treize volumes remontant à la Grèce antique. Utilisé comme manuel scolaire pendant des siècles, sa lecture a été source d'un ennui profond chez certains et vécue comme une révélation par d'autres. Aujourd'hui, les *Éléments* d'Euclide ne sont plus employés ni dans l'enseignement secondaire ni dans le cursus universitaire. Pourtant, le traité d'Euclide est toujours aussi intéressant à lire et n'a rien perdu de son actualité. Le premier livre des *Éléments* est plutôt court, facile d'accès et sa lecture a beaucoup à apporter aux esprits curieux de mathématiques. Pour en tirer le meilleur parti, il est utile de le mettre en regard avec les mathématiques telles que nous les pratiquons aujourd'hui. Aucun texte moderne ne semble vraiment s'employer à cela, c'est ce qui a motivé la rédaction de cet ouvrage.

Après avoir donné le texte du premier livre des *Éléments* sous une version modernisée issue de la traduction de François Peyrard de 1814, nous le commentons pour en préciser le sens. Suit une présentation de la géométrie euclidienne sous ses différents aspects : axiomatique, synthétique, analytique, historique, pédagogique, mais aussi comme un sujet de recherche

actuel qui intéresse de nombreux mathématiciens. Nous étudions aussi ses rapports à d'autres géométries, projective, elliptique, hyperbolique, ainsi qu'à des sujets connexes appartenant aux domaines de l'analyse et de la topologie. Nous espérons ainsi éclairer le rôle joué par les *Éléments* dans les mathématiques d'aujourd'hui et montrer comment celles-ci s'inscrivent dans la continuité d'Euclide.

L'étudiant en quête de sens trouvera dans le premier livre des *Éléments* la source de bien des abstractions qui constituent les mathématiques d'aujourd'hui. Surtout, il pourra trouver une unité et une signification qui a disparu des cursus universitaires actuels, composés de portails, filières, unités d'enseignement et autres modules qui ont parfois du mal à s'articuler entre eux. L'enseignant appréciera l'exposé systématique des notions de base de la géométrie euclidienne, sous un format parfois critiqué mais dans lequel réside la véritable modernité du texte antique. Nous chercherons à montrer comment et pourquoi l'enseignement de la géométrie euclidienne s'est transformée au cours des siècles qui ont suivi Euclide. Le chercheur pourra méditer sur ces transformations successives, sur les succès et les erreurs des esprits qui l'ont faite évoluer au cours des siècles, ainsi que sur les problèmes d'apparence élémentaire qui restent à ce jour irrésolus. De manière plus prosaïque, le candidat au concours du CAPES ou de l'Agrégation trouvera ici un matériel directement utilisable lors des épreuves orales de mathématiques.

Présentons en détail l'organisation de ce livre. Le premier chapitre restitue le contenu du premier livre des *Éléments* d'Euclide sous une forme dérivée de la traduction de François Peyrard. Le français a été actualisé pour faciliter la lecture, certaines formulations ont été raccourcies. Sur le fond, certaines relations d'incidence implicites chez Euclide ont été précisées entre crochets. Le texte que nous proposons reste néanmoins très proche de la version littérale de François Peyrard. Les Anciens ont jugé nécessaire de commenter les *Éléments* pour les compléter par des remarques de nature mathématique ou historique. Nous faisons de même au second chapitre, nous aidant en cela des commentaires de Proclus.

L'introduction des coordonnées par René Descartes au dix-septième siècle révolutionne la géométrie euclidienne. Le troisième chapitre présente cette méthode d'investigation reposant sur le calcul. Elle est qualifiée d'analytique, par opposition aux raisonnements synthétiques d'Euclide. Nous revenons ensuite aux fondements de la géométrie euclidienne. S'il y a plusieurs méthodes en géométrie, il y a aussi plusieurs façons de formuler ses postulats. Le quatrième chapitre présente cinq axiomatiques alternatives à celles d'Euclide, datant du début du vingtième siècle. Elles en diffèrent par leur motivation. Celle de David Hilbert a pour but de préciser celle d'Euclide. Celle d'Alfred Tarski va permettre d'en démontrer la cohérence logique. Le

système de Georges Birkhoff cherche, quant à lui, à donner des fondements solides à la pratique de la géométrie dans le secondaire.

Ceci nous amène au rôle joué par le traité d'Euclide dans l'enseignement de la géométrie. Il a été utilisé comme manuel jusqu'au dix-neuvième siècle dans beaucoup de pays européens, avant que d'autres ouvrages ne le remplacent. La géométrie synthétique perdure jusqu'au vingtième siècle dans les programmes de l'enseignement secondaire jusqu'à une vague de réformes dont la plus connue en France est celle des « maths modernes ». Ce début de millénaire voit le retour de certaines notions chères à Euclide, qui avaient disparu des programmes officiels, comme les cas d'égalité des triangles.

Le sixième chapitre s'intéresse aux progrès de la géométrie qui font suite aux travaux de René Descartes et de Girard Desargues. Le dix-neuvième siècle est un tournant avec d'une part la construction des géométries non euclidiennes et d'autre part la systématisation des méthodes algébriques en géométrie. Pour les illustrer, nous procédons à la classification des coniques et des quadriques du point de vue affine.

Le début du vingtième siècle voit le développement de nouvelles branches des mathématiques comme l'analyse fonctionnelle et la topologie. Nous examinons leur rapport avec la géométrie élémentaire dans les chapitres VII et VIII. En analyse, la notion d'espace de Hilbert est une version de dimension infinie de l'espace euclidien usuel, nous l'emploierons pour retrouver des résultats classiques d'analyse de Fourier. En topologie, le théorème de Jordan affirme que toute courbe fermée simple du plan le partage en deux composantes connexes. Nous en étudierons une version polygone.

Après un détour par quelques problèmes destinés à affûter l'esprit du lecteur, nous terminons au chapitre X par des résultats récents de géométrie élémentaire dans la tradition d'Euclide, ainsi que par quelques problèmes ouverts ou en cours de résolution. Contrairement à certaines idées reçues, la recherche dans ce domaine est toujours bien vivante et réunit avec bonheur mathématiciens amateurs et professionnels.

Mon espoir est bien sûr que ce livre rende service à tous les passionnés de géométrie élémentaire. Il est la synthèse d'enseignements donnés à tous les niveaux du cursus universitaire et n'aurait pas pu exister sans l'enthousiasme et les retours de nombreux étudiants. Je leur témoigne ici toute ma gratitude. La plupart des figures de ce livre ont été réalisées à l'aide du logiciel GeoGebra par Philémon, je le remercie pour son aide cruciale et sa virtuosité informatique. Enfin, je remercie chaleureusement Rached Mneimné, Alain Debreil et les éditions Calvage et Mounet pour le soin qu'ils ont apporté dans la conception de cet ouvrage.

Yves Coudène, le 1<sup>er</sup> février 2022





*Alors, pour me sauver du doute,  
J'ouvre un Euclide avec amour;  
Il propose, il prouve, et j'écoute,  
Et je suis inondé de jour.*

SULLY PRUDHOMME (1839-1907)

# Chapitre I

## Le livre I des Éléments

Les Éléments d'Euclide se composent de treize livres. Le premier porte sur la géométrie plane, il part de quelques principes fondamentaux, classés en définitions, demandes et notions communes, et procède de manière déductive par une suite de quarante-huit propositions pour aboutir à la démonstration du théorème de Pythagore. J'ai mis au point cette version du livre premier des éléments d'Euclide à partir des traductions littérales de François Peyrard (1760-1822) de 1804 et 1814. Elle en diverge sur certains points spécifiés plus bas.

Les traductions de François Peyrard sont dans le domaine public. On peut télécharger un exemplaire numérisé de l'édition de 1804 sur le site de Gallica [Pey1804]. L'édition de 1814 est sur le site de [Pey1814]. C'est une version remaniée de celle de 1804, qui comprend à la fois le texte en grec ancien, latin et la traduction en français. Elle est sous-titrée *D'après un manuscrit très-ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours*. Ce manuscrit en grec est le codex Vaticanus graecus 190, ramené de Rome par Napoléon et restitué depuis. C'est la plus ancienne version intégrale connue des Éléments, datée aux alentours de 850. On la trouve sur le site de la bibliothèque du Vatican [Vat] en compagnie d'autres exemplaires des Éléments.

Pour établir ces notes, j'ai aussi consulté la traduction commentée de Bernard Vitrac [Vi1990], qui représente la version la plus récente des Éléments publiée en français. Elle a été établie à partir de l'édition bilingue grec-latin de Heiberg [Hei1893] publiée en 1893 et parue à Leipzig. La plus ancienne édition des Éléments en langue française est due à Lefèvre d'Étaples et date de 1516.