NANO

Nano

101. — Benoît Kloeckner. *Un bref aperçu de la géométrie projective*
102. — Michel Balazard. *Le théorème des nombres premiers*
103. — Bruno Kahn. *Fonctions zêta et L de variétés et de motifs*
104. — Patrick Dehornoy. *Le calcul des tresses*
105. — Alain Debreil, Rached Mneimné. *Le groupe symétrique* $\mathfrak{S}_4$ *et ses métamorphoses*
106. — Roger Mansuy, Introduction aux graphes aléatoires (et à la méthode probabiliste)
107. — Jean-Denis Eiden, Espaces vectoriels euclidiens
108. — François Berteloot, Les familles normales
109. — Antoine Chambert-Loir, Théorie de l'information – Trois théorèmes de Claude Shannon (à paraître)
110. — Anna Cadoret, Modules et groupes finis (à paraître)

François Berteloot

Les familles normales

Une introduction, et un nouveau regard

Calvage & Mounet

François Berteloot est professeur à l'université de Toulouse. Ses travaux portent sur l'analyse complexe de plusieurs variables et la dynamique holomorphe.

Mathematics Subject Classification (2010) :

30-D45 Bloch functions, normal functions, normal families
37-F45 Holomorphic families of dynamical systems ;
the Mandelbrot set ; bifurcations

ISBN 978-2-916352-95-4

∞ Imprimé sur papier permanent

Le mathématicien. « Pourquoi tant d'acrobaties ? Tôt ou tard il faudra bien que Monsieur Galilée prenne son parti des faits. Les satellites de Jupiter défonceraient l'enveloppe sphérique. C'est l'évidence même. »

Federzoni. « Je vais bien vous étonner : il n'y a pas d'enveloppes. »

Le philosophe. « Mon brave, n'importe quel livre d'école vous apprendra qu'elles existent. »

Federzoni. « Alors qu'on en fasse de nouveaux. »

La vie de Galilée, Bertolt Brecht

À la mémoire de Gina Gualano et André Berteloot

Table des matières

VI. Itération rationnelle

A. Formules de Cauchy

Avant-propos

Depuis les travaux de Paul Montel et la parution de son ouvrage de 1927, la théorie des familles normales fait partie du paysage classique de l'analyse complexe. Elle assigne un rôle central à la notion de compacité pour les familles de fonctions holomorphes munies de la topologie de la convergence uniforme locale, et s'attache donc à en établir des critères efficaces. Le triptyque constitué des deux théorèmes de Picard et de celui de Picard-Montel est, à cet égard, emblématique de la théorie.

À la même époque, André Bloch énonçait un principe heuristique subordonnant l'existence d'une fonction entière vérifiant certaines propriétés à l'abondance de fonctions holomorphes du disque ayant des caractéristiques analogues. Bien qu'il fût facile de traduire ce principe dans le langage des familles normales, ce n'est qu'en 1975 que Lawrence Zalcman en démontra une version effective.

Son résultat est un procédé de renormalisation montrant comment, par de simples changements d'échelle à la source, des fonctions entières émergent de toute famille non normale de fonctions holomorphes du disque. Un principe, dit de Bloch-Zalcman, en découle.

Au tournant des années 2000, plusieurs auteurs exploitèrent ce procédé pour revisiter la théorie et simplifièrent spectaculairement les preuves d'un bon nombre de résultats importants. Des critères de normalité devenaient des conséquences naturelles du principe de Bloch-Zalcman, et il apparaissait même plus efficace de renormaliser que de dégager de tels critères. Un véritable changement de paradigme se dessinait.

Ce petit livre expose les principaux aspects de la théorie des familles normales et de ses applications en adoptant résolument ce nouveau point de vue. Son cinquième chapitre en est le cœur, mais les thèmes plus classiques de la théorie sont présentés dès le deuxième. Le sixième chapitre traite les bases et quelques aspects avancés de la théorie de l'itération rationnelle. Ce sujet, déjà présent dans l'ouvrage de Paul Montel, est un champ naturel d'application de la théorie des familles normales, dont nous explorons ici certains développements récents.

Les démonstrations sont présentées de façon détaillée et l'introduction systématique des outils et des concepts nécessaires rendent l'exposé « autonome » et parfaitement abordable par les lecteurs ne connaissant pas l'analyse complexe, les premiers chapitres pouvant d'ailleurs servir d'introduction rapide à cette matière.

Le présent texte est en partie basé sur les notes d'un cours donné lors de la Scuola Matématicà Interuniversiteria à Perugia en 2018. C'est une joie de me remémorer la très belle atmosphère de cette école d'été ; que ses étudiants, son « staff », et ses organisateurs soient ici remerciés de l'avoir fait exister.

Je remercie très chaleureusement Rached Mneimné d'avoir accepté un projet dont la forme finale doit beaucoup à ses conseils et à sa grande disponibilité.

Martine et Hervé Queffélec ainsi que Bernard Randé ont gentiment accepté d'effectuer une relecture vigilante. Je les remercie vivement de leur nombreuses et fructueuses interventions.

Des remerciements spéciaux pour Alain Debreil et Arnaud Chéritat, sans la générosité et le talent desquels les dessins n'existeraient tout simplement pas.

François Berteloot,
Toulouse, octobre 2021

Chapitre I

Fonctions holomorphes

Ces deux équations renferment toute la théorie du passage du réel à l'imaginaire, il ne reste plus qu'à indiquer comment s'en servir.

Augustin Louis Cauchy

Ce chapitre introductif, dans lequel nous exposons les rudiments de l'analyse complexe d'une variable, est destiné à rendre le texte accessible aux lecteurs ne connaissant pas, ou connaissant peu, la théorie des fonctions holomorphes.

1. Holomorphie pour les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

1.1. Équation de Cauchy-Riemann

1.1.1. Applications linéaires du plan complexe

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est un corps mais aussi un espace vectoriel réel de dimension 2, c'est pourquoi on parle de « plan complexe ». L'identification de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ repose sur celle de la coordonnée complexe z avec le point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ défini par $x + iy = z$. On dit que x est la partie réelle de z et y sa partie imaginaire. On note $\operatorname{Re} z$ et $\operatorname{Im} z$ les *parties réelle et imaginaire* de $z \in \mathbb{C}$.

Le *conjugué* $\bar{z}$ de $z = x + iy$ est défini par $\bar{z} := x - iy$; son *module*, qui est la norme euclidienne $\sqrt{x^2 + y^2}$ du vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, est noté $|z|$ et est égal à $\sqrt{z\bar{z}}$. Le disque $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ est appelé *disque unité*. Pour tout $r > 0$ et tout $a \in \mathbb{C}$, on notera $\mathrm{D}(a, r)$ le disque $\{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ et D_r le disque $\mathrm{D}(0, r)$.

Nous définirons l'holomorphie comme suit : une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$, définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, est *holomorphe* si elle est de classe $\mathscr{C}^1$ et si en tout point z de Ω sa différentielle $\mathrm{d}f(z) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une application $\mathbb{C}$-linéaire. Il convient donc de bien saisir la signification de la $\mathbb{C}$-linéarité pour une transformation du plan complexe.

Une application $\mathbb{R}$-linéaire $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est déterminée par quatre nombres réels, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, et s'écrit sous la forme

$$T(z) = (\alpha x + \beta y) + i(\gamma x + \delta y),$$

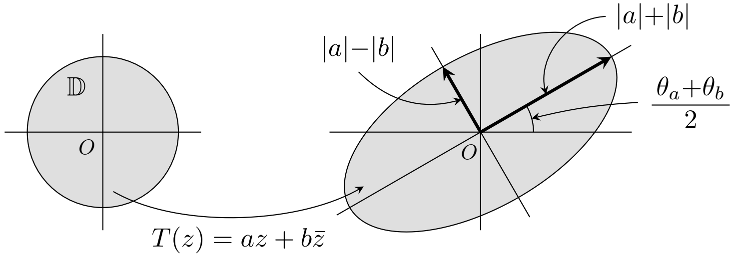
où $x := \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Un petit calcul, consistant à remplacer x par $\dfrac{z + \bar{z}}{2}$ et y par $\dfrac{z - \bar{z}}{2i}$, conduit à une expression de la forme

$$T(z) = a_T z + b_T \bar{z},$$

où

$$a_T := \frac{1}{2}\big((\alpha + \delta) + i(\gamma - \beta)\big) \quad \text{et} \quad b_T := \frac{1}{2}\big((\alpha - \delta) + i(\gamma + \beta)\big).$$

Notons que la quantité b_T mesure le défaut de $\mathbb{C}$-linéarité de l'application T ; en particulier, T est $\mathbb{C}$-linéaire si, et seulement si, $b_T = 0$. Cela s'interprète géométriquement par l'excentricité de l'ellipse image du cercle unité par T.



Distorsion de $\mathbb{D}$ *par* T, *avec* $a = |a|e^{i\theta_a}$, $b = |b|e^{i\theta_b}$ *et* $|a| > |b| > 0$